PARTIE I

Q1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini pour tout $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (x+y, x-y)$.
On démontre que f

A. n'est pas injective	**B.** n'est pas surjective	**C.** n'est ni injective ni surjective	**D.** est bijective

(Les questions Q2 et Q3 sont liées)

Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(1,0,0) = (1,1)$; $f(0,1,0) = (0,1)$ et $f(0,0,1) = (-1,1)$. Alors

Q2 $f(x,y,z)$ vaut

A. $(x-z, x+y+z)$	**B.** $(x-y, x+y+z)$	**C.** $(y-z, x+y+z)$	**D.** $(x-z, x-y+z)$

Q3 Le noyau de l'application linéaire f vérifie

A. $Kerf = \{(0,0,0)\}$	**B.** $\dim kerf = 1$	**C.** $\dim kerf = 2$	**D.** $\dim kerf = 3$

Q4 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini pour tout $(x,y,z,t)\epsilon\mathbb{R}^4$ par :

$$f(x,y,z,t) = (x+y-t, x+z+2t, 2x+y-z, -x+2y+z)$$

Le rang de f (égal à $\dim Imf$) vaut

A. 1	**B.** 2	**C.** 3	**D.** 4

Q5 Soient $,b,c\ \in \mathbb{R}$. Le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ est égal à

A. 0	**B.** abc	**C.** 2abc	**D.** -2abc

(Les questions Q6, Q7 et Q8 sont liées)

On considère la matrice carrée $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Alors

Q6 le vecteur $u = (2,1)$

A. n'est pas vecteur propre de A.	**B.** est vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.	**C.** est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.	**D.** est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

Q7 le vecteur $v = (-1,2)$

A. n'est pas vecteur propre de A.	**B.** est vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.	**C.** est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.	**D.** est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

Q8 Soit $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors P est inversible et $P^{-1}AP$ vaut

A. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$	**B.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	**C.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	**D.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

PARTIE II

(Les questions Q9, Q10 et Q11 sont liées)

On note $z = e^{2i\pi/7}$ une racine septième de 1.

On pose $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$

Q9 Le calcul de $u + v$ donne

A. -1	**B.** 1	**C.** 2	**D.** 3

Q10 Le calcul de uv donne

A. -1	**B.** 1	**C.** 2	**D.** 3

Q11 Les valeurs de u et v sont

A. $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i}\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{2}}$ et $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{-i}\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{2}}$	**B.** $u = \frac{-i\sqrt{7}}{2}$ et $v = \frac{+i\sqrt{7}}{2}$	**C.** $u = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $v = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$	**D.** $u = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $v = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

Q12 L'ensemble des points M d'affixe z tels que Le nombre $u = \frac{1+z}{1-z}$ soit de module 1 est

A. L'axe des réels	**B.** L'axe des réels privé de (1, 0)	**C.** L'axe des imaginaires	**D.** L'axe des imaginaires privé de (0, 1)

Q13 Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{C}[X]$ par le polynôme $(X - a)(X - b)$ est

A. $\frac{aP(b)-bP(a)}{b-a}X + \frac{P(a)-P(b)}{b-a}$	**B.** $\frac{P(b)+P(a)}{b-a}X + \frac{bP(a)+aP(b)}{b-a}$	**C.** $\frac{\mathbf{aP(b)-bP(a)}}{\mathbf{b-a}}\mathbf{X} + \frac{\mathbf{P(a)-P(b)}}{\mathbf{b-a}}$	**D.** $\frac{\mathbf{P(b)-P(a)}}{\mathbf{b-a}}\mathbf{X} + \frac{\mathbf{bP(a)-aP(b)}}{\mathbf{b-a}}$

Q14 Soit P∈ $\mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n. On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses racines distinctes ou non. Soit a ∈ $\mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-xi}$ est égale à

A. $-\frac{P'(a)}{P(a)}$	**B.** $\frac{P\prime(a)}{P(a)}$	**C.** $-\frac{P(a)}{P\prime(a)}$	**D.** $\frac{P(a)}{P\prime(a)}$

Q15 La décomposition en élément simples, sur $\mathbb{R}[X]$, de la fraction rationnelle $\frac{X^2}{X^4+1}$ est

A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{X}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{X}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right)$	**B.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{X}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{X}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right)$	**C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{X}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right)$	**D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{X}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right)$

PARTIE III

Q16 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$ vaut

A. 0	**B.** $\frac{1}{2}$	**C.** 1	**D.** $+\infty$

Q17 $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ vaut

A. 0	**B.** 1	**C.** e^{-1}	**D.** e

Q18 Soit f la fonction définie par $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$. alors

A. f est continue en 0, non dérivable en 0	**B.** f est continue et dérivable en 0	**C.** f n'est ni continue, ni dérivable en 0	**D.** f est continue en 0, dérivable à droite et non dérivable à gauche en 0

Q19 Soit $f(x)=\ln(1+x)$ $(x>-1)$. La dérivée n^{ième} de f au point x est égale à

A. $\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$	**B.** $\frac{(-1)^{n-1} n!}{(1+x)^{n+1}}$	**C.** $\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$	**D.** $\frac{(-1)^n (n-1)!}{(1+x)^n}$

Q20 Soit P la fonction polynomiale réelle définie par $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(\forall x\in\mathbb{R})$. Alors a_k est égal à

A. $\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$	**B.** $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$	**C.** $k!\,f^{(k)}(0)$	**D.** $\frac{f^{(k)}(1)}{k!}$

Q21 Soit f la fonction à deux variables définie par : $f(x,y)=\frac{x^5y^3}{x^6+y^4}$

La limite de f en (0,0)

A. n'existe pas	**B.** est égale à 0	**C.** est égale à 1	**D.** est égale à $+\infty$

Q22 Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(1/\sqrt{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

A. n'existe pas	**B.** est égale à 0	**C.** est égale à 1	**D.** est égale à $+\infty$

Q23 Soit f la fonction définie par : $(\forall x\in\mathbb{R})$, $f(x)=\operatorname{Arctan} x+2\operatorname{Arctan}(\sqrt{1-x^2}-x)$

Pour tout $\in\mathbb{R}$, $f(x)$ est égale à

A. $x-\frac{\pi}{2}$	**B.** $-\frac{\pi}{4}$	**C.** $\frac{\pi}{4}$	**D.** $\frac{\pi}{2}$

PARTIE IV

Q24 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique dont le terme général est

$$u_n = \frac{1+3+9+\cdots+3^n}{3^{n+1}}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} u_n$ est égale à

A. $\frac{1}{6}$	**B.** $\frac{1}{3}$	**C.** $\frac{1}{2}$	**D.** 3

Q25 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique dont le terme général est

$$u_n = n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$$

Alors $\lim_{n\to\infty} u_n$ est égale à

A. 0	**B.** $\frac{1}{2}$	**C.** 2	**D.** $+\infty$

Q26 la somme de la série numérique $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$ est

A. $\frac{2e}{3}$	**B.** e	**C.** $\frac{e^2}{2}$	**D.** $+\infty$

Q27 la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 2}(-1)^n ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

A. n'existe pas	**B.** est égale à $+\infty$	**C.** est égale à $3ln2$	**D.** est égale à $ln2$

Q28 La somme de la série entière de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n2^n}$$

est égale à

A. $-ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$	**B.** $ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$	**C.** $-\frac{1}{2}ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$	**D.** $\frac{1}{2}ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$

Q29 Le développement en série entière de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ pour tout $x \in]-1,1[$ est

A. $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{2^n})x^n$	**B.** $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n$	**C.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$	**D.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2^n}$

Q30 Le développement en série entière de la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

A. $ln6 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}$	**B.** $ln6 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}$

C. $ln6 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}$	**D.** $ln6 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}$